LES INTERACTIONS PROIES / PRÉDATEURS

On étudie dans un écosystème l'évolution de deux populations en fonction du temps t (en s)

- les proies (Lapins) : effectif $x(t)$
- les prédateurs (Renards) : effectif $y(t)$

① EVOLUTION DE $x(t)$ ENTRE t ET $t+dt$

- Ressources alimentaires illimitées (plein de carottes). Chaque couple donne en moyenne naissance à $2a_1$ petits par seconde
  $\Rightarrow$ accroissement : $a_1 x(t)\,dt$
- Vieillesse et maladies emportent une fraction a_2 de la population chaque seconde
  $\Rightarrow -a_2 x(t)\,dt$
- Les rencontres avec les prédateurs sont proportionnelles à $x(t)\,y(t)$ ... et finissent très mal
  $\Rightarrow$ accroissement : $-b\,x(t)\,y(t)\,dt$

AINSI $dx = \left[a_1 x(t) - a_2 x(t) - b x(t) y(t)\right] dt$
$= \left[(a_1 - a_2) - b\,y(t)\right] x(t)\,dt$

si bien que $\boxed{x'(t) = \left(A - B\,y(t)\right) x(t)}$

en posant $A = a_1 - a_2 > 0$ (bouffe ∞) et $B = b > 0$

② EVOLUTION DE $y(t)$ ENTRE t ET $t+dt$

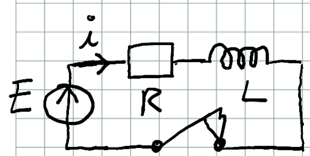
- Vieillesse et maladies emportent chaque seconde une fraction C de la population
  $\Rightarrow -C\,y(t)\,dt$
- On se reproduit mieux le ventre plein ! Le nombre de naissance est proportionnel au nombre de proies mangées
  $\Rightarrow +D\,x(t)\,y(t)\,dt$

AINSI $dy = \left[-C\,y(t) + D\,x(t)\,y(t)\right] dt$

soit $\boxed{y'(t) = \left(-C + D\,x(t)\right) y(t)}$

avec $C > 0$ et $D > 0$

CIRCUIT RL Série



On met le courant à $t=0$ de sorte que $i(0)=0$
On suppose que $E(t) = U_0 = C^{te}$

Pour tout $t \geq 0$, $E = U_R + U_L = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

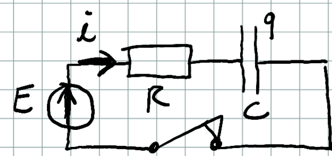
si bien que $\boxed{i'(t) + \dfrac{R}{L} i(t) = \dfrac{U_0}{L}}$ (E)

① (E.H.) solutions de la forme $g_C : t \mapsto C e^{-\frac{Rt}{L}}$
② (S.P.) fonction constante $f : t \mapsto \dfrac{U_0}{R}$
③ Ainsi les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $i : t \mapsto C e^{-Rt/L} + \dfrac{U_0}{R}$
④ Enfin $i(0) = C + \dfrac{U_0}{R} = 0$ donc $C = -\dfrac{U_0}{R}$

Conclusion $\boxed{i : t \mapsto \dfrac{U_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)}$

Part de 0 et croît vers $\dfrac{U_0}{R}$

CIRCUIT RC série



On met le courant à $t=0$
Initialement $q(0) = q_0$
On suppose que $E(t) = U_0$

Pour tout $t \geq 0$, $E = U_R + U_C = Ri + \dfrac{q}{C} = Rq' + \dfrac{q}{C}$

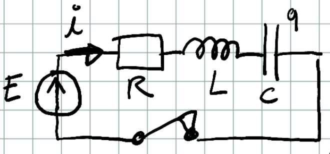
soit $\boxed{q'(t) + \dfrac{q(t)}{RC} = \dfrac{U_0}{R}}$ (E)

① (E.H.) solutions de la forme $g_C : t \mapsto A e^{-t/RC}$
② (S.P.) fonction constante $f : t \mapsto CU_0$
③ Ainsi les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $q : t \mapsto A e^{-t/RC} + CU_0$
④ Enfin $q(0) = q_0 = A + CU_0$ donc $A = q_0 - CU_0$

Conclusion $\boxed{q : t \mapsto (q_0 - CU_0) e^{-t/RC} + CU_0}$

Part de q_0 et tend vers CU_0

CIRCUIT RLC série



On met le courant à $t=0$

Ainsi $i(0)=0$ et $q(0)=q_0$

On suppose que $E(t)=U_0$

Pour tout $t\geq 0$, $E = U_R + U_L + U_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$

$= Rq' + Lq'' + \frac{q}{C}$

si bien que $\boxed{q''(t) + \frac{R}{L}q'(t) + \frac{q(t)}{LC} = \frac{U_0}{L}}$

① (S.P.) fonction constante $f : t \mapsto CU_0$

② (E.H.) son éq. car. est $x^2 + \frac{R}{L}x + \frac{1}{LC} = 0$

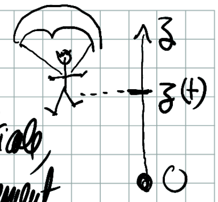
$\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC} = \frac{R^2C - 4L}{L^2C}$

$\Delta > 0$: $q(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$ avec $r_1 r_2 = \frac{1}{LC} > 0$ et $r_1 + r_2 = -R/L < 0$ donc $r_1 < 0$ $r_2 < 0$

$\Delta = 0$: $q(t) = (At+B)e^{-Rt/2L}$

$\Delta = -4\omega^2 < 0$: $q(t) = e^{-Rt/2L}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$

SAUT EN PARACHUTE, bis



① On considère toujours une chute verticale, mais avec cette fois une force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse

$\begin{cases} \text{POSITION} & \vec{OM}(z) \\ \text{VITESSE} & \vec{v}(z') \\ \text{ACCÉLÉRATION} & \vec{a}(z'') \end{cases}$ $\begin{cases} \text{POIDS} & \vec{P} = m\vec{g}\,(-mg) \\ \text{FROTTEMENTS} & \vec{F}\,(+fz'^2) \end{cases}$ avec $g>0$ et $f>0$

PFD $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow mz'' = -mg + fz'^2$

si bien que $\boxed{z'' - \frac{f}{m}z'^2 = -g}$ (E)

avec les conditions initiales $z(0)=h$ et $z'(0)=0$

② (E) s'écrit $z'' = -g + \frac{f}{m}z'^2 = -g\left(1 - \frac{f}{mg}z'^2\right)$

Posons $v_0 = \sqrt{\frac{mg}{f}}$ et effectuons le CdV $z' = v_0 y$ pour simplifier l'équation.

Alors (E) $\Leftrightarrow v_0 y' = -g(1-y^2)$

d'où $\boxed{\frac{y'}{1-y^2} = \frac{-g}{v_0}}$ avec $y = z'/v_0$

{ NOTONS QUE $y<0$ DÉCROÎT VERS -1 SANS L'ATTEINDRE CAR $y' \to 0$ }

③ Intégrons ceci entre 0 et t

- $\int_0^t -g/v_0 \, du = -gt/v_0 = \frac{-t}{T}$ avec $\boxed{T = \frac{v_0}{g}}$
- $\int_0^t \frac{y'(u)\,du}{1-y^2(u)} = \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dx}{1-x^2}$ CdV $x = y(u)$

OR $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$

donc $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Comme $y(0) = \frac{z'(0)}{v_0} = 0$ et $y(t) = \frac{z'(t)}{v_0} \in \left]-1, 0\right]$

alors $\int_0^t \frac{y'(u)\,du}{1-y^2(u)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y(t)}{1-y(t)}\right) = \frac{-t}{T}$

d'où $\frac{1+y(t)}{1-y(t)} = e^{-2t/T} \Rightarrow 1+y = e^{-2t/T} - e^{-2t/T}y$

$\Rightarrow y\left(1+e^{-2t/T}\right) = e^{-2t/T} - 1$

si bien que $\boxed{z'(t) = v_0 y(t) = v_0\left(\frac{e^{-2t/T}-1}{e^{-2t/T}+1}\right)}$

{ CETTE EXPRESSION EST COMPATIBLE AVEC LE FAIT QUE $z'(0)=0$ ET $z'(t) \to -v_0$ QUAND $t \to +\infty$ }

④ Pour trouver $z(t)$, on réécrit la vitesse

$z'(t) = v_0\left(-1 + \frac{2e^{-2t/T}}{1+e^{-2t/T}}\right)$

d'où $z(t) = v_0\left[-t - T\ln\left(1+e^{-2t/T}\right)\right] + C^{te}$

Enfin, pour $t=0$, on a

$z(0) = h = -v_0 T\ln 2 + C^{te}$

$\Rightarrow C^{te} = h + v_0 T\ln 2 = h - v_0 T\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Finalement $\boxed{z(t) = h - v_0\left[t + T\ln\left(\frac{1+e^{-2t/T}}{2}\right)\right]}$

avec $v_0 = \sqrt{\frac{mg}{f}}$ et $T = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{m}{gf}}$